Posons $\begin{cases} u'(x)=1 \\ v(x)=Log\dfrac{x^2}{1-x^2} \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x)=x \\ v'(x)=\dfrac{2}{x(1-x^2)} \end{cases}$

$$I=\frac{1}{2}\left[xLog\frac{x^2}{1-x^2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}\frac{2}{1-x^2}dx$$

Calculons $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}\frac{2}{1-x^2}dx$ on a : $\frac{2}{1-x^2}=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}$

d'où $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}\frac{2}{1-x^2}dx=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x})dx$

$$=\left[-\log(1-x)+\log(1+x)\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}=\left[Log(\frac{1+x}{1-x})\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}$$

$$=Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})-Log(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}})$$

donc $I=\frac{1}{2}\alpha Log\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}-\frac{1}{2}Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})+Log(\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}})$

$$=\frac{1}{2}\alpha Log\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}-\frac{1}{2}Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})+Log(1+\sqrt{2})$$

$$=\alpha^2-\frac{1}{2}Log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})+Log(1+\sqrt{2}) \text{ car } f(\alpha)=\alpha \Rightarrow g(\alpha)=\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}Log\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}=\alpha$$

b) Soit $A(\alpha,0)$; $B(\alpha,\alpha)$; $C(0,\alpha)$ le quadrilatère $OABC$ est un carré d'aire dont une mesure est α^2 d'autre part ( ) coupe (xx') au point d'abscisse $\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $I=\frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}Log\frac{x^2}{1-x^2}dx=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\alpha}g(x)dx$ est l'aire de la partie du plan limitée par ( ), l'axe (xx') et la droite d'équation $x=\alpha$ et comme S_Δ conserve les mesures d'aire alors $\alpha^2=2I+A(k) \Rightarrow A(k)=\alpha^2-2I$ d'où